バナッハ空間上の非拡大写像族の共通不動点の近似について (非加法性の数理と情報 : 非線形性・非可換性との接点)

青山, 耕治; 高橋, 渉; 木村, 泰紀; 豊田, 昌史

数理解析研究所講究録
第 1585 巻 2008 年 65-76

バナッハ空間上の非拡大写像族の共通不動点の近似について

Approximation of common fixed points of a family of nonexpansive mappings in a Banach space

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru TAKAHASHI)
木村 泰紀 (Yasunori KIMURA)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology
玉川大学・工学部 豊田昌史 (Masashi TOYODA)
Faculty of Engineering
Tamagawa University

1 序論

本稿では, 文献 [1,2] から主な結果を抜粋し, その解説を行うと共に, そこには記さなかった関連事項について述べる。C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合, $\{T_n\}$ を C 上の非拡大写像の列, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $x \in C$ とする。点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ を初期点とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n x_n$$

または

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_n x_n$$

で定義する。このような点列の収束に関しては, すでに多くの研究結果が知られている。例えば, [14], [18], [7], [24],[25], および, [8], [27], [4], [20], [19], [12], [16], [11], [13] などである。これらの先行研究の成果を, 包括的に議論しようという試みから始まった研究の成果をまとめたものが, [1,2] である。このような非拡大写像の列を対象とした最近の研究に, 中條-下地-高橋 [15] がある。

第 2 節で準備を行い, 第 3 節である条件を満たす非拡大写像の列に関する収束定理を述べ, その応用として可算無限個の非拡大写像の共通不動点を近似する方法を説明する。第 4 節では, 第 3 節で得られた結果を単調作用素の零点を求める問題に応用する。ここに記

された定理は, 高橋-豊田 [25], 飯塚-高橋 [11] などで得られている結果の拡張である。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ で正の整数の集合を, E で実 Banach 空間を, $\|\cdot\|$ で E のノルムを表す。また, E の点列 $\{x_n\}$ が x へ弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す。

$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in S_E$ かつ $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つとき, Banach 空間 E は一様凸であるという。バナッハ空間 E が Opial 条件 [17] を満たすとは, $x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が常に成り立つときをいう。

E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能であるとは, 各 $y \in S_E$ に対して, 極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が $x \in S_E$ に関して一様に収束するときをいう。E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは, 各 $x \in S_E$ に対して, 極限 (2.1) が $y \in S_E$ に関して一様に収束するときをいう。Banach 空間の凸性やそのノルムの微分可能性について詳しくは, [21] を参照するとよい。

C を Banach 空間 E の空でない部分集合とし, T を C から E への写像とする。写像 T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。写像 T が非拡大であるとは, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ に対して成り立つときをいう。D を C の部分集合とする。このとき, $Q\colon C \to D$ が sunny であるとは, $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して, $Qx + t(x - Qx) \in C$ ならば $Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$ が成り立つことである。また, 任意の $x \in D$ に対して $Qx = x$ が成り立つとき, $Q\colon C \to D$ は射影であるという。D が C の sunny 非拡大レトラクトであるとは, C から D の上への sunny 非拡大射影が存在するときをいう。

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする。このとき, H から C の上への距離射影 P_C は, H から C の上への sunny 非拡大射影であるから, C は sunny 非拡大レトラクトである。

sunny 非拡大射影の存在については, 例えば, 次の定理が知られている。

定理 2.1 ([26]). E を一様凸で, そのノルムが一様 Gâteaux 微分可能な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。T を C 上の非拡大写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ とする。このとき, $F(T)$ は C の sunny 非拡大レトラクトである。

C を Banach 空間 E の空でない部分集合とし, $\{T_n\}$ を C から E への非拡大写像の列で共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が空ではないものとする。以下, $\{T_n\}$ に対する条件を二つ述べる。$\{T_n\}$ が**条件 (s)** を満たすとは, 任意の空でない有界集合 $D \subset C$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{y \in D} \|T_{n+1}y - T_n y\| < \infty \text{ および } F(T) = F$$

が成り立つときをいう。ここで, $T\colon C \to E$ は, $x \in C$ に対して, $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ で定義される写像である。また, $\{T_n\}$ が**条件 (w)** を満たすとは, 任意の空でない有界部分集合 $D \subset C$ と $\mathbb{N}$ の増加列 $\{n_i\}$ に対して, 非拡大写像 $T\colon C \to E$ と部分列 $\{T_{n_i}\}$ の部分列 $\{T_{n_{i_j}}\}$ が存在し

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{y \in D} \left\| Ty - T_{n_{i_j}} y \right\| = 0 \text{ および } F(T) = F$$

が成り立つときをいう。定義から, $\{T_n\}$ が条件 (s) を満たすならば, $\{T_n\}$ は条件 (w) を満たすことがわかる。なぜならば, $D \subset C$ を空でない有界集合とし, $\{T_n\}$ が条件 (s) を満たすと仮定すると, [2, Lemma 3.2] より

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in D} \|Ty - T_n y\| = 0$$

が示せるからである。

3 弱および強収束定理

本節では, まず, 条件 (s) または (w) を満たす非拡大写像の列に関する収束定理を取り扱う。次に, その応用として可算無限個の非拡大写像の共通不動点を近似する方法を述べる。

条件 (w) を満たす列に対しては, 次の弱収束定理を示すことができる。

補助定理 3.1 ([1, Lemma 3.2]). E を一様凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。E のノルムは Fréchet 微分可能であるか, または, E は Opial 条件満たすとする。$\{T_n\}$ を C 上の非拡大写像の列とし, 条件 (w) を満し, 共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が空ではないと仮定する。$\{\alpha_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする。ただし, $0 < a \le b < 1$ である。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_n x_n$$

で定義される C の点列 $\{x_n\}$ は F の点に弱収束する。

条件 (s) を満たす列に対しては, 次の強収束定理を示すことができる。

定理 3.2 ([2, Theorem 3.4]). E を一様凸, そのノルムが一様 Gâteaux 微分可能な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする。$\{T_n\}$ を条件 (s) を満たす C 上の非拡大写像の列とし, 共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではないと仮定する。$\{\alpha_n\}$ を, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ および $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たす $[0,1]$ の数列とする。$x \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T_n x_n$$

と定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qx に強収束する。ここで, Q は E から F の上への sunny 非拡大レトラクションである。

定理 3.2 の $\{\alpha_n\}$ に対する 3 番目の条件 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を次の条件で置き換えることができる。

$\{\alpha_n\}$ は $(0,1]$ の点列で, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\alpha_{n+1} = 1$ を満たす。

さて, 補助定理 3.1 および定理 3.2 では, 非拡大写像列に対して, 条件 (s) または (w) を仮定しているので, 任意の非拡大写像列にそのまま適応できない。しかし, 任意に与えられた非拡大写像列から, 共通不動点集合が一致し, かつ, 条件 (s) を満たす (したがって, 条件 (w) を満たす) 列を簡単に作り出すことが可能である。その一例を次に述べよう。

例 3.3. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\{S_k\}$ を共通不動点を持つ C 上の非拡大写像の列とする。このとき, 写像の列 $\{T_n\}$ を

$$\begin{aligned}
T_1 &= S_1, \\
T_2 &= \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2, \\
T_3 &= \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{4}S_2 + \frac{1}{4}S_3, \\
T_4 &= \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{4}S_2 + \frac{1}{8}S_3 + \frac{1}{8}S_4, \\
&\vdots \\
T_n &= \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{4}S_2 + \frac{1}{8}S_3 + \frac{1}{16}S_4 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}S_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}S_n, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

と定義する。[2] の議論により, $\{T_n\}$ は, 条件 (s) を満たす非拡大写像の列で,

$\bigcap_{k=1}^{\infty} F(S_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が成り立つ。したがって，点列 $\{x_n\}$ を，$x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \dfrac{1}{n}x + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) T_n x_n$ で定義すると，定理 3.2 より，$\{x_n\}$ は $\{S_k\}$ の共通不動点に強収束することがわかる。

以上のことを一般的に書いたものが，次の定理である。

定理 3.4 ([2, Theorem 4.1]). E を一様凸，そのノルムが一様 Gâteaux 微分可能な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸部分集合とする。$\{S_k\}$ を C 上の非拡大写像列とし，共通不動点の集合 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(S_k)$ は空ではないと仮定する。$\{\alpha_n\}$ を，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ および $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たす $[0,1]$ の数列とする。$\{\beta_n^k : n \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ を $[0,1]$ の 2 重数列で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=1}^{n} \beta_n^k = 1$, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \beta_n^k > 0$, そして $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left|\beta_{n+1}^k - \beta_n^k\right| < \infty$ を満たすとする。$x \in C$ とし，C の点列 $\{x_n\}$ を，$x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \sum_{k=1}^{n} \beta_n^k S_k x_n$$

と定義する。このとき，$\{x_n\}$ は Qx に強収束する。ここで，Q は E から F の上への sunny 非拡大レトラクションである。

4 応用

ここでは，補助定理 3.1 および定理 3.2 から導かれるその他の結果を述べる。

文献 [25], [11] では，逆強単調作用素に関する変分不等式問題と非拡大写像に対する不動点問題の共通解を近似するアルゴリズムについての議論が行われている。ここでは，その議論をもう少し広げ，二つの単調作用素の和の零点集合と非拡大写像の不動点集合の共通点を求める問題を考える。具体的に次のような問題である。

問題 4.1. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合，α を正の定数，$A \colon C \to H$ を α-逆強単調写像，B を H 上の極大単調作用素，$S \colon C \to C$ を非拡大写像とし，$\mathrm{dom}(B) \subset C$ および $F(S) \cap (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ を仮定する。このとき，$F(S) \cap (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ の点に収束する点列を構成せよ。

問題 4.1 と [25] または [11] で扱っている問題との関係については，本節の最後で述べることにする。まず，必要とされる定義や記号の説明をしよう。本節では，H を実 Hilbert 空間；C を H の空でない部分集合とし，H の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。

写像 $A\colon C \to H$ が逆強単調 [5, 23] であるとは, ある正の実数 α が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq \alpha \|Ax-Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき, A は α-逆強単調写像と呼ばれる。定義より, 逆強単調写像は, 単調で Lipschitz 連続であることがわかる。さらに, λ を $0<\lambda\leq 2\alpha$ を満たす実数, I を C 上の恒等写像とするとき, 写像 $I-\lambda A$ は非拡大であることが知られている ([25] または [23] を参照せよ)。

B を H から 2^H への写像, つまり, H 上の多価写像とする。B の有効定義域を $\mathrm{dom}(B)$ で表す。つまり, $\mathrm{dom}(B)=\{x\in H : Bx\neq\emptyset\}$ である。多価写像 B が H 上の単調作用素であるとは, すべての $x, y\in \mathrm{dom}(B)$, $u\in Bx$ および $v\in By$ に対し $\langle x-y, u-v\rangle\geq 0$ が成り立つときをいう。H 上の単調作用素 B が極大であるとは, B のグラフが他のどんな単調作用素のグラフにも含まれないときをいう。

B を H 上の極大単調作用素, $r>0$ とする。このとき, $J_r=(I+rB)^{-1}$ は, H から $\mathrm{dom}(B)$ への 1 価写像であることが知られている。J_r は, B のレゾルベントと呼ばれ, 非拡大であり, $B^{-1}0=F(J_r)$ が成り立つことが知られている ([23] を参照せよ)。ここで, $B^{-1}0=\{x\in H : Bx\ni 0\}$ である。さらに, すべての $\lambda, \mu>0$ および $x\in H$ に対して

$$\|J_\lambda x - J_\mu x\| \leq \frac{|\lambda-\mu|}{\lambda}\|x-J_\lambda x\| \tag{4.1}$$

が成り立つ [9]。この不等式を使うと, 次の補助定理を示すことができる。

補助定理 4.2. H, C, α, A, B は, 問題 4.1 と同じとする。$r>0$ に対する B のレゾルベントを J_r で表す。このとき, 任意の $s, t>0$ と $y\in C$ に対して

$$\begin{aligned}&\|J_s(I-sA)y-J_t(I-tA)y\|\\&\qquad\leq |t-s|\left(\|Ay\|+\frac{1}{t}\|(I-tA)y-J_t(I-tA)y\|\right)\end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ。さらに, D を C の有界部分集合とし, $0<c\leq d$ とすると,

$$\sup\left\{\|Ay\|+\frac{1}{t}\|(I-tA)y-J_t(I-tA)y\| : y\in D,\ t\in[c,d]\right\}<\infty \tag{4.3}$$

である。

証明. J_s が非拡大であることと, 不等式 (4.1) より, すべての $s, t > 0$ と $y \in C$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|J_s(I - sA)y - J_t(I - tA)y\| \\
&\quad \leq \|J_s(I - sA)y - J_s(I - tA)y\| + \|J_s(I - tA)y - J_t(I - tA)y\| \\
&\quad \leq \|(I - sA)y - (I - tA)y\| + \frac{|t - s|}{t} \|(I - tA)y - J_t(I - tA)y\| \\
&\quad = |t - s| \left(\|Ay\| + \frac{1}{t} \|(I - tA)y - J_t(I - tA)y\| \right)
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。ここで, J_t が非拡大であり, A は Lipschitz 連続であることに注意すると, (4.3) を得る。 □

定理を示すために, 次の補助定理が必要である。

補助定理 4.3 ([3]). H, C, α, A, B, S は, 問題 4.1 と同じとし, $r \in (0, 2\alpha)$ とする。$r > 0$ に対する B のレゾルベントを J_r で表す。このとき

$$F(SJ_r(I - rA)) = F(J_r(I - rA)S) = F(S) \cap F(J_r(I - rA)) = F(S) \cap (A + B)^{-1}0$$

が成り立つ。

補助定理 3.1, 4.2 および 4.3 を使うと, 次の弱収束定理を示すことができる。

定理 4.4. H, C, α, A, B, S は, 問題 4.1 と同じとする。$\{\alpha_n\}$ を $[a, b]$ の, $\{r_n\}$ を $[c, d]$ の数列とする。ただし, $0 < a \leq b < 1$, $0 < c \leq d < 2\alpha$ である。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) SJ_{r_n}(x_n - r_n Ax_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A + B)^{-1}0$ の点に弱収束する。

証明. Hilbert 空間 H は, 補助定理 3.1 の仮定を満たす Banach 空間である。各 n に対して, $T_n = SJ_{r_n}(I - r_n A)$ とおく。補助定理 4.3 から

$$F(T_n) = F(SJ_{r_n}(I - r_n A)) = F(S) \cap F(J_{r_n}(I - r_n A)) = F(S) \cap (A + B)^{-1}0,$$

つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F(S) \cap (A + B)^{-1} \neq \emptyset$ であることがわかる。S, J_{r_n} および $I - r_n A$ は, それぞれ非拡大であるから, T_n も非拡大写像である。以下, $\{T_n\}$ が条件 (w) を満たすことを示そう。D を C の空でない有界部分集合とし, $\{n_i\}$ を $\mathbb{N}$ の増加列とする。仮定より, $\{r_{n_{i_j}}\}$ が収束するような $\{n_i\}$ の部分列 $\{n_{i_j}\}$ が存在する。ここで, $r = \lim_{j \to \infty} r_{n_{i_j}}$, $T = SJ_r(I - rA)$ とおくと, $r \in [c, d]$ であり, T は C 上の非拡大写像

である。補助定理 4.3 より, $F(T) = F(S) \cap (A+B)^{-1}0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である。また, (4.2) より, すべての $y \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|Ty - T_n y\| &= \|SJ_r(I - rA)y - SJ_{r_n}(I - r_n A)y\| \\ &\leq \|J_r(I - rA)y - J_{r_n}(I - r_n A)y\| \\ &\leq |r - r_n| \left(\|Ay\| + \frac{1}{r} \|(I - rA)y - J_r(I - rA)y\| \right)\end{aligned}$$

が成り立つ。また, (4.3) より

$$\sup \left\{ \|Ay\| + \frac{1}{r} \|(I - rA)y - J_r(I - rA)y\| : y \in D \right\} < \infty$$

である。ゆえに

$$\lim_{j \to \infty} \sup_{y \in D} \left\| Ty - T_{n_{i_j}} y \right\| = 0$$

であり, $\{T_n\}$ が条件 (w) を満たすことが示せた。したがって, 補助定理 3.1 より, $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の点に弱収束する。 □

同様に, 定理 4.4 の仮定のもとで, 次の結果を得る。

定理 4.5. H, C, α, A, B, S は, 問題 4.1 と同じとし, $\{\alpha_n\}$ および $\{r_n\}$ は, 定理 4.4 と同じとする。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n}(Sx_n - r_n ASx_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の点に弱収束する。

次に, 定理 3.2, 補助定理 4.2 および 4.3 を使って, 強収束定理を証明しよう。

定理 4.6. H, C, α, A, B, S は, 問題 4.1 と同じとする。$\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列, $\{r_n\}$ を $[c, d]$ の数列とする。ただし, $0 < c \leq d < 2\alpha$ であり, $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$ を満たすとする。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n}(Sx_n - r_n ASx_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の点 Px に強収束する。ここで, P は, H から $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の上への距離射影である。

証明. Hilbert 空間 H は, 定理 3.2 の仮定を満たす Banach 空間である。各 n に対して, $T_n = J_{r_n}(I - r_nA)S$ とおく。補助定理 4.3 から

$$F(T_n) = F(J_{r_n}(I - r_nA)S) = F(S) \cap F(J_{r_n}(I - r_nA)) = F(S) \cap (A+B)^{-1}0,$$

つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F(S) \cap (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ を得る。S, J_{r_n} および $I - r_nA$ は, それぞれ非拡大であるから, T_n も非拡大写像である。以下, $\{T_n\}$ が条件 (s) を満たすことを示そう。D を C の空でない有界部分集合とする。(4.2) より, すべての $y \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|T_{n+1}y - T_ny\| &= \left\|J_{r_{n+1}}(I - r_{n+1}A)Sy - J_{r_n}(I - r_nA)Sy\right\| \\ &\leq |r_{n+1} - r_n| \left(\|ASy\| + \frac{1}{r_n}\|(I - r_nA)Sy - J_{r_n}(I - r_nA)Sy\|\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。$S(D)$ は有界であることに注意すると, (4.3) より

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\|ASy\| + \frac{1}{r_n}\|(I - r_nA)Sy - J_{r_n}(I - r_nA)Sy\| : y \in D,\ n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\quad = \sup\left\{\|Az\| + \frac{1}{r_n}\|(I - r_nA)z - J_{r_n}(I - r_nA)z\| : z \in S(D),\ n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\quad \leq \sup\left\{\|Az\| + \frac{1}{t}\|(I - tA)z - J_t(I - tA)z\| : z \in S(D),\ t \in [c,d]\right\} < \infty\end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{y \in D} \|T_{n+1}y - T_ny\| < \infty$$

が成り立つ。仮定より, $\{r_n\}$ は収束するので, その極限を $r \in [c,d]$ とする。写像 $T\colon C \to C$ を $T = J_r(I - rA)S$ で定義する。(4.2) より, 各 $y \in D$ に対して

$$\begin{aligned}\|Ty - T_ny\| &= \|J_r(I - rA)Sy - J_{r_n}(I - r_nA)Sy\| \\ &\leq |r - r_n| \left(\|ASy\| + \frac{1}{r}\|(I - rA)Sy - J_r(I - rA)Sy\|\right) \to 0\end{aligned}$$

が成り立ち, 補助定理 4.3 より, $F(T) = F(S) \cap (A+B)^{-1}0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ を得る。以上より, $\{T_n\}$ が条件 (s) を満たすことが示せた。したがって, 定理 3.2 より, $\{x_n\}$ は Px へ強収束する。 □

同様にして, 次の定理を得る。

定理 4.7. H, C, α, A, B, S は, 問題 4.1 と同じとし, $\{\alpha_n\}$ および $\{r_n\}$ は, 定理 4.6 と同じとする。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) S J_{r_n}(x_n - r_n A x_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の点 Px に強収束する。ここで, P は, H から $F(S) \cap (A+B)^{-1}0$ の上への距離射影である。

最後に, これまで本節で得られた結果と [25] および [10, 11] の結果との関係を述べる。C を H の空でない閉凸集合とするとき, 写像 $A\colon C \to H$ に関する変分不等式問題とは, $\langle y-x, Ax\rangle \geq 0\,(\forall y \in C)$ を満たす $x \in C$ を求める問題である。このとき, x をこの問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す。$\lambda > 0$ に対して

$$F(P_C(I-\lambda A)) = \mathrm{VI}(C, A) \tag{4.4}$$

が成り立つことが知られている。ここで, P_C は H から C の上への距離射影である。詳しくは, [23] を参照するとよい。

さて, 定理 4.7 の直接的な結果として, 次の系を得る。

系 4.8 ([11, Theorem 3.1]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, P_C を H から C の上への距離射影とする。α を正の定数, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像, $S\colon C \to C$ を非拡大とし, $F(S) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定する。$\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $\{r_n\}$ を $[c, d]$ の数列とする。ただし, $0 < c \leq d < 2\alpha$ であり, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$ を満たすとする。このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - r_n A x_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap \mathrm{VI}(C, A)$ の点 Px に強収束する。ここで, P は, H から $F(S) \cap \mathrm{VI}(C, A)$ の上への距離射影である。

証明. H から H への多価写像 B を

$$Bx = \begin{cases} N_C(x) = \{z \in H : \langle y-x, z\rangle \leq 0,\ \forall y \in C\}, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

で定義する。すると, B は H 上の極大単調作用素であり, そのレゾルベントは P_C に一致することが知られている (詳しくは, [23] を参照せよ)。また, $(A+B)^{-1}0 = \mathrm{VI}(C, A)$ が成り立つことが容易にわかる。ゆえに, 定理 4.6 より, 結論を得る。 □

同様にして, 定理 4.4 は [25, Theorem 3.1] の, 定理 4.5 は [10, Theorem 4.3] の, 定理 4.6 は [10, Theorem 3.1] の拡張になっている。

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 89–99.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[3] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, to appear.

[4] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 150–159.

[5] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[6] R. E. Bruck Jr., *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 251–262.

[7] G. Das and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. **17** (1986), 1263–1269.

[8] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[9] K. Eshita and W. Takahashi, *Approximating zero points of accretive operators in general Banach spaces*, JP J. Fixed Point Theory Appl., to appear.

[10] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong and weak convergence theorems by a hybrid steepest descent method in a Hilbert space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 115–130.

[11] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 341–350.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[13] Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Convergence to common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **84** (2005), 350–363.

[14] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[15] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[16] J. G. O'Hara, P. Pillay, and H.-K. Xu, *Iterative approaches to finding nearest common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **54** (2003), 1417–1426.

[17] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[18] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[19] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[20] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641–3645.

[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[23] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2005 (Japanese).

[24] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Anal. **5** (1998), 45–56.

[25] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[26] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.

[27] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 486–491.